

قسم الرياضيات  
السنة الثانية



جامعة البعث  
كلية العلوم

العام الدراسي : 2017 / 2018

# طوبولوجيا عامة (١)

المحاضرة النظرية الثانية

(٢)

إعداد :

داني محفوض – وهب الحسن



Facebook: Dani Mahfoud



Facebook: Wahab Al-Hasan

أرضي: ٠٣١٢١١٨١١٩

جوال: ٠٩٤٤٨٠٨٢٤٩

تطلب من مكتبة مدار الهندسية

حمص – نفق جامعة البعث

نبدأ بهذه المحاضرة بدراسة المفهوم الأول من مفاهيم الطوبولوجيا...

## الفضاء المترى

مفهوم الفضاء المترى: ...  
لتكن لدينا المجموعة الغير خالية  $X$  ٤. ولناخذ مجموعة  
الجداء الديكارتي لمجموعة  $X$  مع نفسها ...  
أي: لنأخذ المجموعة:  $X \times X = \{(x, y) : x, y \in X\}$   
ولناخذ الدالة التي مجموعة تعرفها (منطقها) هي:  
مجموعة الثنائيات  $X \times X$  (أي مجموعة الجداء الديكارتي لـ  $X$   
مع نفسها) ٥. ولناخذ قيمة (مستقرها) في مجموعة  
الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  ولنزعم لها بالرمز  $d$  ...  
أي: أخذنا الدالة:  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$   
نسمي الدالة  $d$  دالة مسافة (أو دالة قوس) وإذا  
حققت الشروط الثلاثة الآتية:  
الشرط الأول: أن المسافة (البعد) بين أي نقطتين  
من المجموعة  $X$  هي مقدار موجب أو يساوي الصفر.  
متى تكون المسافة مقدار موجب؟ عندما تكون النقطتين  
التي ندرس بينهما المسافة مختلفتين عن بعضهما.  
متى تكون المسافة تساوي صفر؟ عندما تكون النقطتين  
منطقتين ٦. فكما نعلم لا يوجد مسافة بين النقطتين  
ونفسها! ...

أرضي: ٠٣١٢١١٨١١٩

جوال: ٠٩٤٤٨٠٨٢٤٩

لطلب من مكتبة مدار الهندسية

حصص - تلقى جامعة البعث

كيف نرقم رياضياً للشرط الأول؟

\* عندها نريد أن نعبر عن المسافة بين النقطتين  $x$  و  $y$  ، نكتب :  $d(x, y)$

\* نكتب الشرط الأول كما يلي :

$$d(x, y) \geq 0 \quad | \quad d(x, y) > 0 \Leftrightarrow x \neq y \quad \forall x, y \in X$$
$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$$

الشرط الثاني : إن المسافة بين أي نقطتين  $x$  و  $y$  هي نفسها المسافة بين النقطتين  $y$  و  $x$  ، حيث النقطتين  $x$  و  $y$  من المجموعة  $X$  .  
نرمز لذلك بالشكل :  $d(x, y) = d(y, x)$

الشرط الثالث : وإذا كان لدينا ثلاث نقاط مختلفة عن بعضها  $x$  و  $y$  و  $z$  من المجموعة  $X$  ، فإن المسافة بين النقطتين  $x$  و  $y$  أصغر تماماً من البعد بين المسافتين : المسافة بين  $x$  و  $z$  ، والمسافة بين  $y$  و  $z$  .  
ونرمز لذلك بالشكل :  $d(x, y) < d(x, z) + d(y, z)$

\* وإذا كانت النقاط الثلاث  $x$  و  $y$  و  $z$  تقع على استقامة واحدة ، متكون المسافة بين  $x$  و  $y$  تساوي مجموع المسافتين : المسافة بين  $x$  و  $z$  ، والمسافة بين  $y$  و  $z$  . أي ←

أرضي : ٣١٢١١٨١١٩

تطلب من مكتبة مدار الهندسية

جوال : ٩٤٤٨٠٨٢٤٩

حصص - تلقى جامعة البعث

$$\text{أي: } d(x, y) = d(x, z) + d(y, z)$$

ذلك ما نحتاجه نسميه في المرحلتين الأولى والثانية بمترابعية المثلثات: (أي: ضلع من المثلثين طولهما أصغر أو يساوي (لا يزيد) مجموع طوليه للضلعين الآخرين) ، وذلك هو المعنى الهندسي للشرط الثالث.

$$\text{أي: إذا حققت الدالة: } d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

الشرط الثالث السابق نسميها دالة مسافة

والآن: ما هو الفضاء المترابي؟

لأنه المجموعة  $X$  مع دالة المسافة  $d$ ، والمعروفة الجداء الديكارتي بينها وبين نفسها (بين  $X$  و  $X$ ) ، تسمى فضاءً مترابياً ، وعندما نريد أن نقول أننا لدينا الفضاء المترابي الذي مجموعته  $X$  ودالة مسافته هي  $d$  ، نرمز لها ببساطة بالرمز (المناسبت):  $(X, d)$

ملاحظة: يمكن أن نلغي الشرط الأول ، وذلك عندما يكون مستقر الدالة  $d$  هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة. أي: تكون الدالة  $d$  بالشكل:  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$

أرضي: ٣١٢١١٨١١٩

تطلب من مكتبة ميار الهندسية

جوال: ٩٤٤٨٠٨٢٤٩

حمص - نفق جامعة البعث

فدلائعته. مفهوم الفضاء المترى:

لتكن  $X$  مجموعة ما. لتكن  $d$  دالة معرفة على  $X \times X$

وتأخذ قيمها في  $\mathbb{R}$ :  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y)$$

نسمي  $d$  دالة مسافة (مترى) إذا حققت الشروط:

$$\textcircled{1} d(x, y) \geq 0$$

$$* d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y: \forall x, y \in X$$

$$\textcircled{2} d(x, y) = d(y, x)$$

$$\textcircled{3} d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y): x, y, z \in X$$

إن المجموعة  $X$  مع الدالة  $d$  تسمى فضاءً مترى. ونرمز

لذلك بالرمز:  $(X, d)$

لندرس مثال عن الفضاء المترى: «المثال الأول»

لنأخذ  $X = \mathbb{R}$  مجموعة الأعداد الحقيقية. ولنعرف الدالة  $d$

التي مجموعة تعريفها هي مجموعة الشائيات  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . وتأخذ

قيمها في  $\mathbb{R}$ . وقاعدة ربطها هي:  $d(x, y) = |x - y|$

$$\text{أي: } d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d(x, y) = |x - y| \text{ حيث: } x \text{ و } y \text{ عددين حقيقيين.}$$

لنثبت أن  $d$  هي دالة مسافة. وذلك بأن نتحقق

من صحتها الشروط الثلاث (موضوعات المسافة).



أرضي: ٠٣١٢١١٨١١٩

تطلب من مكتبة ميلار الهندسية

جوال: ٠٩٤٤٨٠٨٢٤٩

حمص - نفق جامعة البعث

الشرط الأول:  $x \neq y$  :  $d(x, y) = |x - y| > 0$  \*

وذلك بحسب القيمة المطلقة لعدد حقيقي.

$x = y$  :  $d(x, y) = |x - x| = |y - y| = 0$  \*

إذاً: الشرط الأول محقق وضوفاً.

الشرط الثاني:  $d(x, y) = d(y, x)$

البرهان:  $d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)|$

$= |-x + y| = |y - x| = d(y, x)$

إذاً الشرط الثاني محقق.

الشرط الثالث:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

البرهان:  $d(x, y) = |x - y|$

ولو أضفنا  $z$  وطرفنا  $z$  في هذين القيمتين المطلقتين

ميصح لدينا:

$d(x, y) = |x - y + z - z| = |x - z + z - y|$

$= ||x - z| + |z - y||$

ونعلم أن من خواص القيم المطلقة: إن القيمة المطلقة لمجموع

مقدارين أمغر أو تساوي مجموع القيمتين المطلقتين لهذين المقدارين.

أي أن:  $|x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$

$\Rightarrow \leq d(x, z) + d(z, y)$

إذاً:  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

إذاً: الشرط الثالث محقق.

أرضي: ٠٣١٢١١٨١١٩

تطلب من مكتبة ميلار الهندسية

جوال: ٠٩٤٤٨٠٨٢٤٩

حمص - نفق جامعة البعث



وأما الشروط الثلاث فمحققة 6. وبالتالي إن الدالة  $d$  ...  
 هي دالة مسافة 6. وهي معرفة على المجموعة  $R \times R$  ...  
 وإذا  $R$  هو فضاء مترى مع الدالة  $d$  6 ونسمي الفضاء  
 المترى الحقيقي المألوف ونرمز له بالرمز  $(R, d)$ .

.....  
 سنكمل في المحاضرة القادمة دراسة أمثلة أخرى عن  
 الفضاء المترى .....

## انتهت المحاضرة الثانية